Formelsammlung zur Zuverlässigkeitsberechnung

zusammengestellt von

Tatjana Lange
Fachhochschule Merseburg
Fachbereich Elektrotechnik

Inhalt:

1. Zuverlässigkeit von Betrachtungseinheiten

- Verteilungsfunktion der Lebensdauer (Ausfallwahrscheinlichkeit) und Verteilungsdichte:

$F(t) = P(X \leq t)$	$f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$	$F(t) = \int_0^t f(t)dt$

- Überlebenswahrscheinlichkeit:

allgemein.	für $F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$
$R(t) = P(X > t) = 1 - F(t)$	$R(t) = \exp(-\lambda t)$

- Bedingte Überlebenswahrscheinlichkeit:

allgemein.	für $F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$
$R_x(t) = \frac{R(x+t)}{R(x)}$	$R_x(t) = \exp(-\lambda t)$

- Mittlere Lebensdauer (MTTF, MTBF):

allgemein.	für $F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$
$E[X] = \int_0^\infty t \cdot f(t) \cdot dt = \int_0^\infty R(t) \cdot dt$	$E[X] = \frac{1}{\lambda}$

- Ausfallrate:

allgemein.	für $F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$
$\lambda(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)} = -\frac{d(\ln R(t))}{dt}$	$\lambda(t) = \lambda = const.$

- Zusammenhang zwischen Ausfallrate und Überlebenswahrscheinlichkeit:

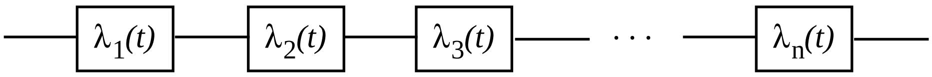
allgemein.	für $F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$
$R(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(t) \cdot dt\right)$	$R(t) = \exp(-\lambda t)$

- Verfügbarkeit (reparierbarer Betrachtungseinheiten):

$V_D = \frac{MTBF}{MTBF + MTTR}$	MTBF= Mean Time between Failure MTTR = Mean Time to Repair

2. Zuverlässigkeit elementarer, nichtreparierbarer Systeme

Seriensystem (im Sinne der Zuverlässigkeit):

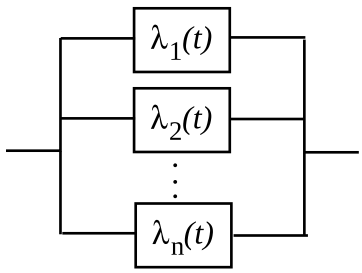


allgemein:	für $F_i(t) = 1 - \exp(-\lambda_i t)$:
$R_S(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t)$	$R_S(t) = \exp\left(-\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \cdot t\right)$
$\lambda_S(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)$	$\lambda_S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

Mittlere Lebensdauer (MTTF, MTBF) für $F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$:

$E[X_S] = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{E[X_i]}}$	Für $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = const.$ gilt: $E[X_S] = \dfrac{E[X_1]}{n} = \dfrac{1}{n\lambda_1}$

Parallelsystem (im Sinne der Zuverlässigkeit):



allgemein:	für $F_i(t) = 1 - \exp(-\lambda_i t)$:
$R_S(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - R_i(t)\right)$	Für $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = const.$ und $\lambda_1 t << 1$ gilt: $R_S(t) \approx 1 - (\lambda_1 t)^n$

Mittlere Lebensdauer (MTTF, MTBF) für $F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$:

Für $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = const.$ gilt:	$E[X_S] = \dfrac{1}{\lambda_1} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$

3. Zuverlässigkeit komplexer Systeme: Boolesche Berechnungsmethode

Allgemeiner Ansatz:

Jede Systemkomponente kann nur zwei Zustande annehmen:

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{Komponente ausgefallen} \\ 1 & \text{Komponenten intakt} \end{cases}$$

Entsprechend der zuverlässigkeitstheoretischen Systemstruktur wird eine Boolesche Systemgleichung, bestehend aus Konjunktionen ("Und"-Verknüpfung) und Disjunktionen ("Oder"-Verknüpfungen) aufgestellt:

$$S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß das System intakt ist (seine spezifizierten Aufgaben erfüllt) ist somit gleich der Wahrscheinlichkeit, daß die Systemgleichung $S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ den Wert 1 annimmt:

$$P(System\,\mathrm{int}\,akt) = P_S = P\big(S(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1\big) = S(P_1, P_2, \ldots, P_n)$$

wobei P_i die Intaktwahrscheinlichkeit der *i*-ten Komponente ist.

Für nichtreparierbare Systeme gilt:

Überlebenswahrscheinlichkeit (Intaktwahrscheinlichkeit):

$$R_S(t) = S\big(R_1(t), R_2(t), \ldots, R_n(t)\big)$$

$m - aus - n$-System

(System ist solange intakt, solange *m* von *n* Komponenten intakt sind)

$$R_S(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{l=0}^{i} (-1)^{i-l} \binom{n}{i} \binom{i}{l} R_k^{n-l}(t)$$

mit $r = n - m$ Redundanz

Für $R_1(t) = R_2(t) = \ldots = R_n(t) = e^{-\lambda_1 t}$ gilt:

$$E[X_S] = \frac{1}{\lambda_1} \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k}$$

Für reparierbare Systeme gilt:

Verfügbarkeit:

$$V_S(t) = S\left(V_1(t), V_2(t), \ldots, V_n(t)\right)$$

$m - aus - n$-System

(System ist solange verfügbar, solange m von n Komponenten verfügbar sind)

Für $V_1(t) = V_2(t) = \ldots = V_n(t) = V_k = \dfrac{MTBF_k}{MTBF_k + MTTR_k} = const.$ gilt:

Nichtverfügbarkeit:

$$N_S(t) = 1 - V_S(t) = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n}{i} N_k^{n-i} V_k^i \quad mit \quad N_k = 1 - V_k$$

$$r = n - m \qquad \text{Redundanz}$$

Mittlerer Abstand zwischen zwei Systemausfällen (MTBF):

Falls $MTBF_k >> MTTR_k$: $\qquad MTBF_S \approx \dfrac{MTBF_k^{r+1}}{n\binom{n-1}{r} MTTR_k^r}$

Mittlere Dauer der Systemausfällen (MTBD - Mean Time of Break Down):

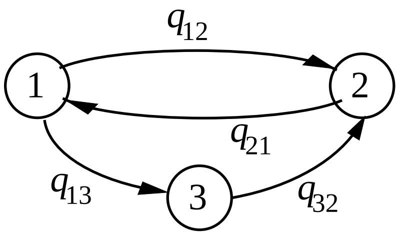
Falls $MTBF_k >> MTTR_k$: $\qquad MTBD_S \approx \dfrac{MTTR_k}{r+1}$

Für $N_k << \dfrac{1}{n}$ gilt näherungsweise:

$$N_S(t) = 1 - V_S(t) \approx \binom{n}{r+1} N_k^{r+1} = \binom{n}{r+1} \frac{MTTR_k^{r+1}}{MTBF_k^{r+1}}$$

4. Zuverlässigkeit komplexer Systeme: Markoff'sche Berechnungsmethode

Im Ergebnis einer quantitativen Analyse des Systemverhaltens wird ein **Zustandsdiagramm** aufgestellt, dessen **Knoten** die möglichen Systemzustände darstellen. Die Übergänge (Kanten) q_{jk}zwischen die Knoten sind durch **Übergangsraten** bestimmt, die entweder Ausfallraten λ_{jk} oder Reparaturraten μ_{jk} darstellen:



Knoten *j*:
Systemzustand *j* mit der Zustandswahrscheinlichkeit p_j

Übergangsrate:

$$q_{jk} = \begin{cases} \lambda_{jk} & \text{Ausfallrate} \\ \mu_{jk} & \text{Reperaturrate} \end{cases}$$

Die Markoff'sche Berechnungsmethode wird hier nur für den stationären **Zustand**, also unter der Annahme $p_j(t) = p_j = const.$ betrachtet.

Dabei wird angenommen, daß sowohl die zufällige Lebensdauern X_i aller Systemkomponenten als auch die zufälligen Reparaturzeiten Y_i exponentialverteilt sind, also $X_i \sim F(t) = 1 - \exp(-\lambda_i t)$ und $Y_i \sim F_Y(t) = 1 - \exp(-\mu_i t)$.

Für den ***j*-ten Knoten** gilt dann folgende Knotengleichung:

$$\underbrace{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} p_k q_{kj}}_{\substack{\text{Summe aller in den } j\text{-ten Knoten} \\ \text{hineinführenden Kanten}}} \quad - \quad \underbrace{p_j \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} q_{jk}}_{\substack{\text{Summe aller aus dem } j\text{-ten Knoten} \\ \text{herausführenden Kanten}}} \quad = 0$$

Die Zustandswahrscheinlichkeiten p_j lassen sich berechnen, indem man für $n-1$ Konten die Zustandsgleichungen aufstellt, diese durch die allgemeingültige Beziehung

$$\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$$

ergänzt und das so gebildete lineare **Gleichungssystem** aus *n* Gleichungen (*n* = Anzahl der Knoten im Zustandsdiagramm) löst.

5. Einige ausgewählte Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie

Zufall / zufälliges Ereignis:

Bei Zusammentreffen von Ereignissen spricht man vom Zufall, wenn zwischen ihrem Eintreten kein oder nur ein unwesentlicher innerer Zusammenhang besteht.

Ein Ereignis hängt vom Zufall ab, wenn sein Eintreten weder sicher noch unmöglich ist, sondern mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit erfolgt. Diese Zufallsgesetzmäßigkeiten, die durch entsprechende Wahrscheinlichkeitsverteilungen erfaßt werden, nennt man stochastische Gesetzmäßigkeiten.

Zufallsvariable:

Eine Zufallsvariable ist eine solche Variable (Veränderliche), die ihre Werte in Abhängigkeit vom Zufall, d.h. nach einer Wahrscheinlichkeitsverteilung annimmt.

Man unterscheidet **diskrete** und **stetige** Zufallsvariable.

Eine **diskrete Zufallsvariable** kann nur endlich viele (oder abzählbar unendlich viele) Werte annehmen (z.B. Menge der natürlichen Zahlen).

Eine **stetige Zufallsvariable** kann (überabzählbar) unendlich viele Werte annehmen (z.B. alle Werte aus einem Intervall).

Relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit

Der Begriff **Wahrscheinlichkeit** ist aus der Beobachtung und Erfahrung entstanden.: Tritt bei *N*-maliger Durchführung eines Versuches ein bestimmtes zufälliges Ereignis A_i (oder Zufallsvariable) n_i mal auf, so bezeichnet man mit (n_i/N) die **relative Häufigkeit** des Ereignisses A_i.

Bei gleichbleibenden Versuchsbedingungen schwankt die relative Häufigkeit bei wachsendem N immer weniger um einen bestimmten, praktisch konstanten Wert. Diese Zahl nennt man die **Wahrscheinlichkeit** der zufälligen Ereignisses A_i und bezeichnet sie mit $P(A_i)$.

Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten:

1) Für jedes zufälligen Ereignisses A_i gilt: $0 \le P(A_i) \le 1$

2) Ist das Ereignis A_i unmöglich, so gilt: $P(A_i) = 0$

3) Ist das Ereignis A_i sicher, so gilt: $P(A_i) = 1$

4) Sind A und B zufällige Ereignisse, die einander ausschließen, so gilt

$$P(A \text{ oder } B) = P(A \vee B) = P(A) + P(B)$$

Sind insgesamt N Ereignisse $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_N$, möglich, so gilt verallgemeinert:

$$P(A_1 \vee A_2 \vee \ldots\ldots \vee A_N,) = \sum_{i=1}^{N} P(A_i)$$

5) Schließen die Ereignisse A und B einander nicht aus, so gilt:

$$P(A \text{ oder } B) = P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A, B)$$

Hierbei ist $P(A,B)$ die **gemeinsame Wahrscheinlichkeit** (Verbundwahrscheinlichkeit) der Ereignisse *A* und *B*, d.h. die Wahrscheinlichkeit dessen, daß beide Ereignisse gleichzeitig (zusammen) auftreten.

6) Sind die Ereignisse *A* und *B* voneinander **unabhängig**, so gilt für die **gemeinsame Wahrscheinlichkeit**:

$$P(A,B) = P(B,A) = P(A) \cdot P(B) = P(B) \cdot P(A)$$

7) Sind die Ereignisse *A* und *B* voneinander **abhängig**, so gilt für die **gemeinsame Wahrscheinlichkeit**:

$$P(A,B) = P(B,A) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B)$$

Hierbei ist $P(B \mid A)$ die Wahrscheinlichkeit, mit der das Ereignis *B* unter der Bedingung (Annahme) eintritt, daß das Ereignis *A* bereits eingetreten ist (bzw. sicher eintreten wird).

Die Wahrscheinlichkeiten $P(B \mid A)$ und $P(A \mid B)$ nennt man **bedingte Wahrscheinlichkeiten.**

8) Sind die Ereignisse *A* und *B* voneinander **unabhängig**, so gilt:

$$P(A \mid B) = P(A) \quad , \quad P(B \mid A) = P(B)$$

9) Wenn die Ereignisse $H_1, H_2, \ldots\ldots, H_N$, ein vollständiges Ereignisfeld bilden und einander ausschließen, also

$$\sum_{i=1}^{N} P(H_i) = 1 \quad \text{und} \quad P(H_i, H_j) = 0 \quad \text{für beliebige} \quad i \neq j \quad \text{ist,}$$

so gilt für die Wahrscheinlichkeit des von den Ereignissen H_i abhängigen Ereignisses A folgender **Satz über die totale Wahrscheinlichkeit**:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{N} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)$$

10) Bayes'sche Formel:

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)}{\sum_{j=1}^{N} P(H_j) \cdot P(A \mid H_j)}$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Verteilungsfunktion $F_X(x)$:

Der Wert der Verteilungsfunktion $F_X(x)$ im Punkt *x* gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der der Wert der Zufallsvariablen *X* kleiner/gleich *x* ist:

$$F_X(x) = F(x) = P(X \leq x)$$

diskrete Zufallsvariable:

- Ist *X* eine diskrete Zufallsvariable, die die Werte

$$x_1, x_2, \ldots, x_N$$

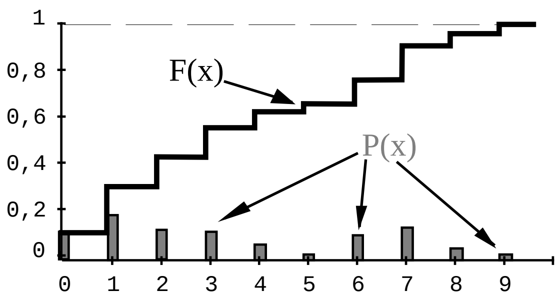
mit den Wahrscheinlichkeiten

$$P(X = x_1), P(X = x_2), \ldots, P(X = x_N)$$

annehmen kann, so wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung durch eine treppenförmige Verteilungsfunktion bestimmt.

Der Zusammenhang zwischen der Verteilungsfunktion und den Wahrscheinlichkeiten der diskreten Zufallsvariablen ist gegeben mit:

$$F(x_j) = P(X \leq x_j) = \sum_{i=1}^{j} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{j} P(x_i)$$



stetige Zufallsvariable:

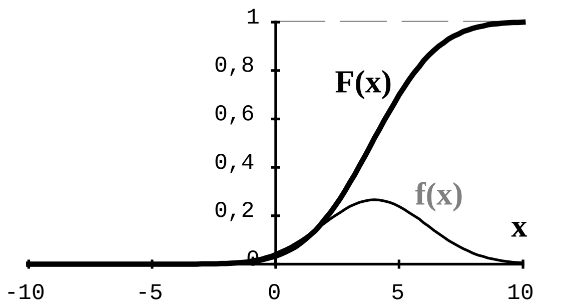
- Ist *X* eine stetige Zufallsvariable, so läßt sich nur die Wahrscheinlichkeit angeben, mit der diese Zufallsvariable *X* Werte aus dem Intervall $[x_1, x_2]$ annimmt:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(u)du$$

Die Funktion $f(x)$ nennt man die **Dichte** der Zufallsvariablen *X*.

Der Zusammenhang zwischen der Dichte $f(x)$ und der Verteilungsfunktion $F(x)$ ist gegeben mit:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du \quad ; \quad f(x) = \frac{F(x)}{dx}$$



Eigenschaften und Gesetze:

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

$$F(-\infty) = 0 \text{ da } P(X \leq -\infty) = 0 \qquad F(+\infty) = 1 \text{ da } P(X \leq +\infty) = 1$$

$$F(x_1) \leq F(x_2) \quad \text{falls} \quad x_1 \leq x_2$$

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1) = F(x_2) - F(x_1)$$

diskret	stetig
$\sum_{i=1}^{N} P(x_i) = 1, \qquad 0 \leq P(x_i) \leq 1$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
$P(x_a \leq X \leq x_b) = \sum_{i=a}^{i=b} P(x_i)$	$P(x_a \leq X \leq x_b) = \int_{x_a}^{x_b} f(x)dx$

💣 Erwartungswert und Varianz; Momente höherer Ordnung:

diskrete Zufallsvariable:	stetige Zufallsvariable:

💣 Erwartungswert:

$E(X)=\sum_{i=1}^{N} x_i P(X=x_i)$	$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\cdot dx$

$$E(aX+b)=a\cdot E(X)+b$$

Wenn $Z = X+Y$, dann

$$E(Z)=E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

$$E(\alpha\cdot X+\beta\cdot Y)=\alpha\cdot E(X)+\beta\cdot E(Y)$$

💣 Varianz:

$Var(X)=\sum_{i=1}^{N}\left[x_i-E(X)\right]^2 p(X=x_i)$	$Var(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[x_i-E(X)]^2\cdot f(x)\cdot dx$

$$Var(X)=E\left([X-E(X)]^2\right)=E\left(X^2\right)-[E(X)]^2$$

$$Var(aX+b)=a^2 Var(X)$$

Wenn $Z = X+Y$, dann

$$Var(Z)=Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)$$

$$Var(\alpha\cdot X+\beta\cdot Y)=\alpha^2\cdot Var(X)+\beta^2\cdot Var(Y)+2\cdot\alpha\cdot\beta\cdot Cov(X,Y)$$

Für statistisch **unabhängige Zufallsvariable** *X* und *Y* gilt:

$$Var(Z)=Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)$$

$$Var(\alpha\cdot X+\beta\cdot Y)=\alpha^2\cdot Var(X)+\beta^2\cdot Var(Y)$$

💣 Momente *k*-ter Ordnung:

$E(X^k)=\sum_{i=1}^{N} x_i^k P(X=x_i)$	$E(X^k)=\int_{-\infty}^{\infty} x^k\cdot f(x)\cdot dx$

6. Sonstige nützliche Formeln

Kombination:	$K_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

Ableitungen		**Integrale**	
$\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert$
$\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$	$\left(e^{ax}\right)' = a \cdot e^{ax}$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$	$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$
		$\int x \cdot e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)$	
$(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	$\int u(x) \cdot v'(x) \cdot dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) \cdot dx$	

Lösung eines Gleichungssystems mit Hilfe von Determinanten:

Gleichungssystem:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

Lösung:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix}$$

Berechnungsregel für Determinanten:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & .. & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & .. & a_{2n} \\ \vdots & .. & \vdots \\ a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & .. & a_{1n} \\ \vdots & .. & \vdots \\ a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} a_{12} & .. & a_{1n} \\ \vdots & .. & \vdots \\ a_{n-1,2} & .. & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

usw.