

Prof. Dr. Tatjana Lange

Lehrgebiet: Regelungstechnik Laborübung 08:

Thema:

Regelkreise mit einer Nichtlinearität: Beschreibungsfunktion, Stabilität

1. Übungsziele:

- ➤ Demonstration der Signalflüsse und Signalformen in Regelkreisen mit Nichtlinearitäten
- ➤ Meßtechnische Ermittlung der Beschreibungsfunktion des verzögerungsfreien Dreipunktschalters
- ➤ Demonstration der Stabilitätsbedingungen im Regelkreis mit einer Nichtlinearität

2. Grundlagen:

2.1. Die Beschreibungsfunktion:

Betrachtet man nichtlineare Systeme nicht losgelöst, sondern eingebunden in komplexere Strukturen aus Systemen mit weitgehend linearem Verhalten, so läßt sich das Verhalten eines nichtlinearen Systems durch eine Näherung oder Ersatzkenngröße charakterisieren.

Dem klassischen Ansatz folgend, soll dazu ein nichtlineares System in einem einfachen Regelkreis betrachtet werden:

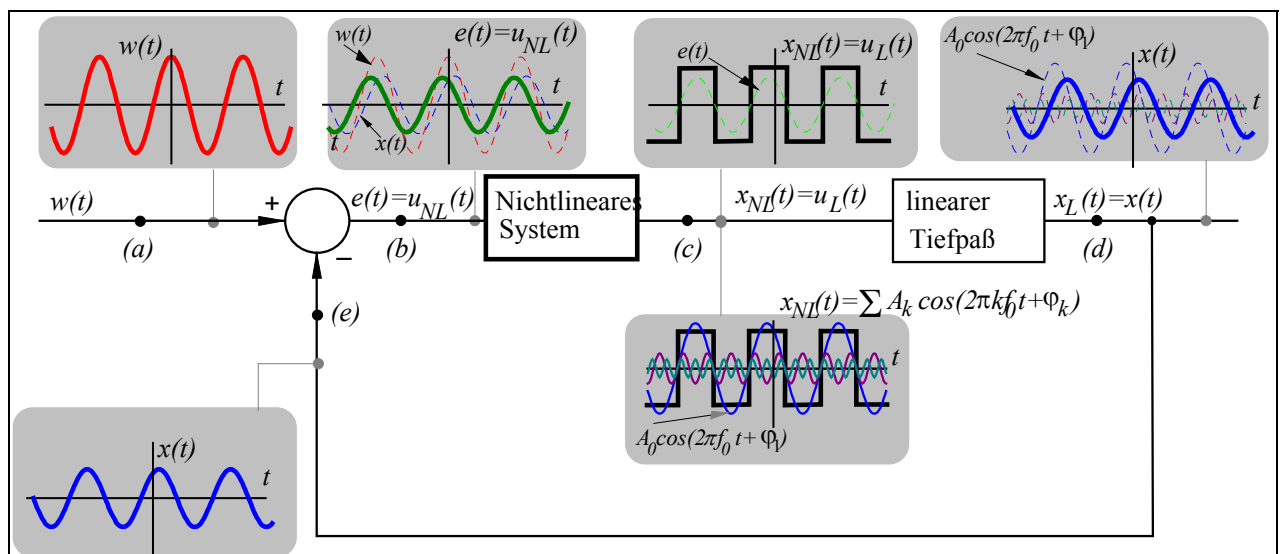


Abb. 2.1.: Regelkreis mit nichtlinearem System

Zunächst sollen die Vorgänge im offenen "Regelkreis" veranschaulicht werden, d.h. es soll angenommen werden, daß die Rückkopplungsschleife (d) \rightarrow (e) aufgetrennt wurde:

Am Eingang des Regelkreises (im Punkt (a)) wirkt die harmonische Führungsgröße $w(t) = W_0 \cos(2\pi f_0 t)$.

Da die Rückkopplung unterbrochen ist, ist die Führungsgröße $w(t)$ gleich dem Signal $u_{NL}(t)$ am Eingang des nichtlinearen Systems, also $u_{NL}(t) = W_0 \cos(2\pi f_0 t)$.

Wenn am Eingang des nichtlinearen Systems ein periodisches Signal wirkt, so ist auch das Ausgangssignal ein periodisches Signal, wie das Beispiel des verzögerungsfreien Zweipunktschalters zeigt. Die Perioden des Eingangs- und des Ausgangssignals sind gleich $t_{p_u} = t_{p_x} = t_p$.

Auf der Basis der Fouriertransformation kann das nichtharmonische periodische Signal $x_{NL}(t)$ am Ausgang des nichtlinearen Systems als Summe einer Grundwelle und vieler Oberwellen interpretiert werden, also

$$x_{NL}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \varphi_k) \text{ mit } f_0 = \frac{1}{t_p},$$

wobei die Periode der Grundwelle gleich der Periode der Führungsgröße $w(t)$ ist.

Wenn das nachgeschaltete lineare System Tiefpaßcharakter mit einer Grenzfrequenz $f_g > f_0$ und $f_g < 2f_0$ besitzt (und das soll hier angenommen werden), dann unterdrückt dieses lineare System alle Oberwellen, so daß an seinem Ausgang wieder ein harmonisches Signal

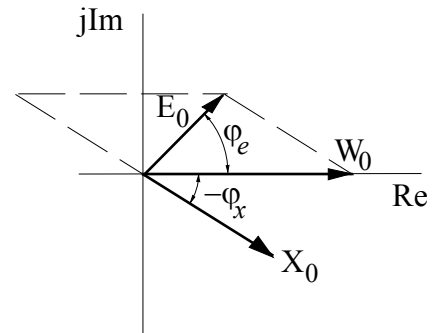
$$x_L(t) = x(t) = |G_L(f_0)| \cdot A_1 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_1 - \varphi_L(f_0)) = X_0 \cos(2\pi f_0 t - \varphi_x)$$

erscheint.

Schließt man nun den Regelkreis, so erhält man mit $e(t) = w(t) - x(t)$ eine Überlagerung zweier gleichfrequenter Schwingungen, was zu einer resultierenden Schwingung gleicher Frequenz führt:

$$\begin{aligned} w(t) &= W_0 \cos(2\pi f_0 t) = W_0 \frac{e^{j(2\pi f_0 t)} + e^{-j(2\pi f_0 t)}}{2} \\ x(t) &= X_0 \cos(2\pi f_0 t - \varphi_x) = X_0 \frac{e^{j(2\pi f_0 t - \varphi_x)} + e^{-j(2\pi f_0 t - \varphi_x)}}{2} \\ e(t) &= w(t) - x(t) = W_0 \frac{e^{j(2\pi f_0 t)} + e^{-j(2\pi f_0 t)}}{2} - X_0 \frac{e^{j(2\pi f_0 t - \varphi_0)} + e^{-j(2\pi f_0 t - \varphi_0)}}{2} = \\ &= \frac{e^{j(2\pi f_0 t)} [W_0 - X_0 e^{-j\varphi_x}] + e^{-j(2\pi f_0 t)} [W_0 - X_0 e^{+j\varphi_x}]}{2} \end{aligned}$$

Die Darstellung von W_0 und $X_0 e^{-j\varphi_x}$ als Vektoren in der komplexen Zahlenebene zeigt, daß beide zu einem resultierenden Vektor $[W_0 - X_0 e^{-j\varphi_x}] = E_0 e^{+j\varphi_e}$ führen.



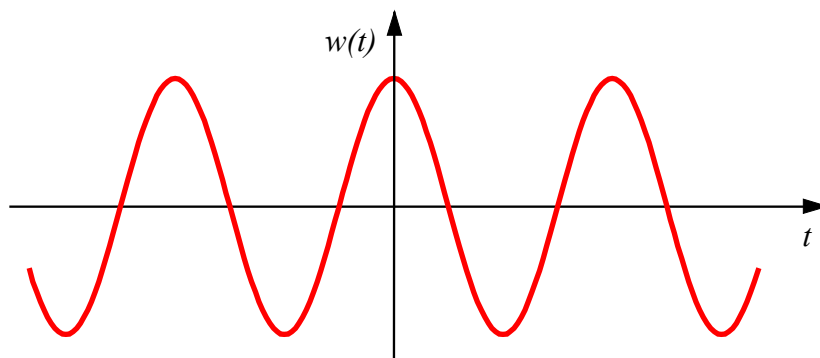
Analog gilt $[W_0 - X_0 e^{+j\varphi_x}] = E_0 e^{-j\varphi_e}$

Folglich ist

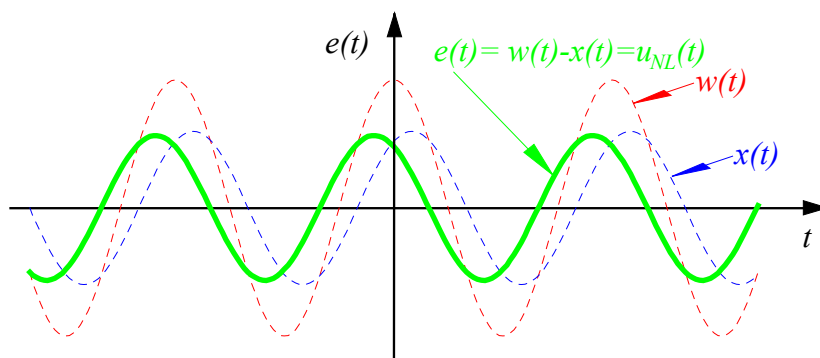
$$\begin{aligned} e(t) &= \frac{e^{j(2\pi f_0 t)} [W_0 - X_0 e^{-j\varphi_x}] + e^{-j(2\pi f_0 t)} [W_0 - X_0 e^{+j\varphi_x}]}{2} = \\ &= \frac{e^{j(2\pi f_0 t)} [E_0 e^{+j\varphi_x}] + e^{-j(2\pi f_0 t)} [E_0 e^{-j\varphi_x}]}{2} = E_0 \frac{e^{j(2\pi f_0 t + \varphi_x)} + e^{-j(2\pi f_0 t + \varphi_x)}}{2} = \\ &= E_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_x) \end{aligned}$$

Das bedeutet, daß am Eingang des nichtlinearen Systems wieder ein harmonisches Signal mit der Periode t_p anliegt, so daß auch in den anderen Punkten des Systems wie bisher folgende Signalarten erscheinen:

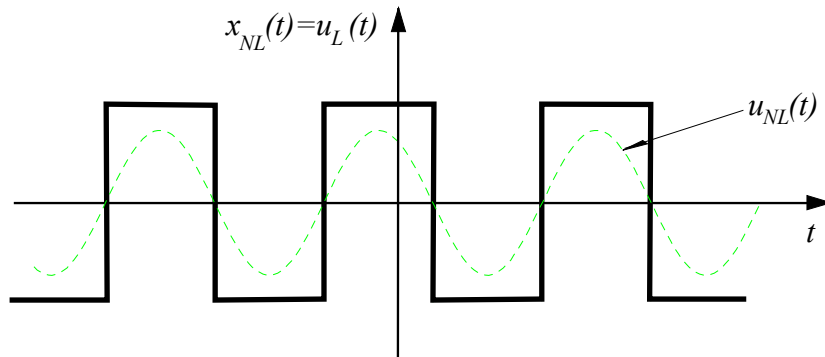
- • harmonisches Signal der Periode t_p im Punkt **(a)** am Eingang des Regelkreises



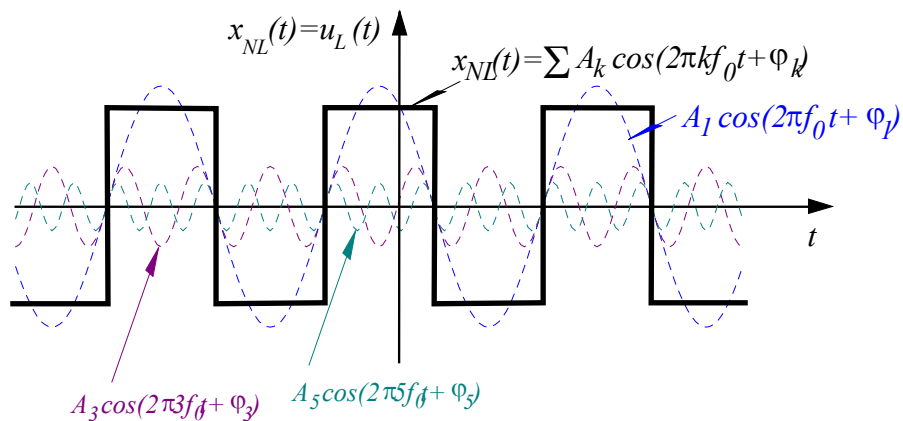
- • harmonisches Signal $e(t) = u_{NL}(t)$ der Periode t_p im Punkt **(b)** am Eingang des nichtlinearen Systems



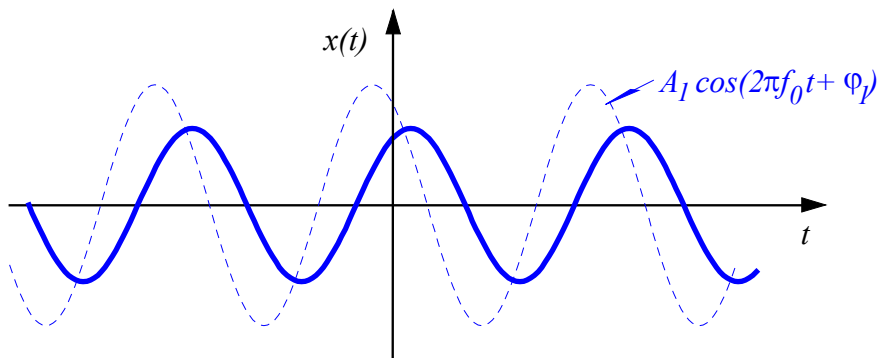
- • nichtharmonisches Signal $x_{NL}(t)$ der Periode t_p im Punkt (c) am Ausgang des nichtlinearen Systems bzw. am Eingang des linearen Tiefpasses, z.B. im Fall eines verzögerungsfreien Zweipunktschalters:



Dieses nichtharmonische periodische Signal $x_{NL}(t)$ kann als Summe einer harmonischen Grundwelle $A_1 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_1)$ der Periode $t_p = 1/f_0$ und harmonischer Oberwellen $A_k \cos(2\pi k f_0 t + \varphi_k)$ mit $k = 2, 3, \dots$ interpretiert werden:



- • harmonisches $x(t)$ Signal der Periode t_p im Punkt (d) am Ausgang des Regelkreises und im Punkt (e) der Rückkopplung:



Folglich ist es für die Betrachtung eines solchen Regelkreises völlig ausreichend, das Verhalten des nichtlinearen Systems nur bezüglich der Grundwelle $A_1 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_1)$ zu beschreiben.

Für ein nichtlineares System, an dessen Eingang $u_{NL}(t) = u(t)^{1[1]}$ eine Kosinusschwingung $U_0 \cos(2\pi f_0 t)$ wirkt, ist also **eine Beschreibungsmöglichkeit bezüglich der Grundschiwingung $A_1 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_1)$** am Ausgang $x_{NL}(t, U_0) = x(t, U_0)^{2[2]}$ des nichtlinearen Systems zu finden.

Die Grundschiwingung am Ausgang des nichtlinearen Systems sei nachfolgend mit $x_g(t) = A_1 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_1)$ gezeichnet. Sie unterscheidet sich vom kosinusförmigen Eingangssignal $u(t) = U_0 \cos(2\pi f_0 t)$ nur

- $\Rightarrow \Rightarrow$ durch die Amplitude A_1
- und
- $\Rightarrow \Rightarrow$ durch die Phasenverschiebung φ_1

Genau diese Änderung wird durch das Verhältnis

$$\frac{x_g(t, U_0)}{u(t)} = \frac{A_1 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_1)}{U_0 \cos(2\pi f_0 t)} \quad (1)$$

erfaßt.

Zwecks Vereinfachung der Darstellung soll im weiteren folgende **Vereinbarung** Anwendung finden:

Streng genommen gelten folgende komplexe Darstellungen:

$$A_1 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_1) = \frac{A_1}{2} e^{j(2\pi f_0 t + \varphi_1)} + \frac{A_1}{2} e^{-j(2\pi f_0 t + \varphi_1)}$$

bzw.

$$U_0 \cos(2\pi f_0 t) = \frac{U_0}{2} e^{j(2\pi f_0 t)} + \frac{U_0}{2} e^{-j(2\pi f_0 t)}$$

Aufgrund der **Symmetrie der komplexen Schreibweise** kann man **vereinbarungsgemäß** auf folgende **Kurzdarstellung** zurückgreifen:

$$A_1 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_1) \triangleq \frac{A_1}{2} e^{j(2\pi f_0 t + \varphi_1)} \quad (2)$$

^{1[1]} Auf den Index NL soll im weiteren der Einfachheit halber verzichtet werden.

^{2[2]} Beachte: Das Signal am Ausgang des nichtlinearen Systems hängt i.a. von der Amplitude des Eingangssignals ab.

$$U_0 \cos(2\pi f_0 t) \hat{=} \frac{U_0}{2} e^{j(2\pi f_0 t)} \quad (3)$$

Setzt man nun in Anlehnung an den Ausdruck (1) die komplexen Kurzdarstellungen (2) und Gl. (3) ins Verhältnis, so kommt man zur **Beschreibungsfunktion** $N(U_0)$, die das Verhalten des nichtlinearen Systems bezüglich der Grundschiwingung im Ausgangssignal wiedergibt:

$$\frac{\frac{A_1}{2} e^{j(2\pi f_0 t + \varphi_1)}}{\frac{U_0}{2} e^{j(2\pi f_0 t)}} = \frac{A_1}{U_0} e^{j\varphi_1} = N(U_0) \quad (4)$$

Mit $\frac{A_1}{2} e^{j\varphi_1} = C_1 = |C_1| e^{j\varphi_1}$ und der (aus Anlage 1) bekannten Formel zur Bestimmung des komplexen Fourierkoeffizienten C_1 aus dem Ausgangssignal $x(t, U_0)$

$$C_1 = |C_1| e^{j\varphi_1} = \frac{1}{t_p} \int_{-t_p/2}^{+t_p/2} x(t, U_0) e^{-j2\pi f_0 t} dt; \quad f_0 = \frac{1}{t_p} \quad (5)$$

kommt man schließlich zu folgenden Ausdrücken für die **Beschreibungsfunktion**:

$$N(U_0) = \frac{2C_1}{U_0} = \frac{2|C_1|}{U_0} e^{j\varphi_1} = |N(U_0)| e^{j\varphi_1} \quad (6)$$

$$|N(U_0)| = \frac{2|C_1|}{U_0}$$

Beachte:

Die Beschreibungsfunktion $N(U_0)$ des frequenzunabhängigen nichtlinearen Systems und somit auch ihr Betrag $|N(U_0)|$ und ihre Phase φ_1 **hängen von der Amplitude U_0 des harmonischen Eingangssignals ab.**

(Streng genommen müßte man in allen Ausdrücken anstelle von φ_1 richtigerweise $\varphi_1(U_0)$ schreiben. Darauf soll aus Gründen der Übersichtlichkeit jedoch verzichtet werden.)

Bei Wirken eines kosinusförmigen Signals

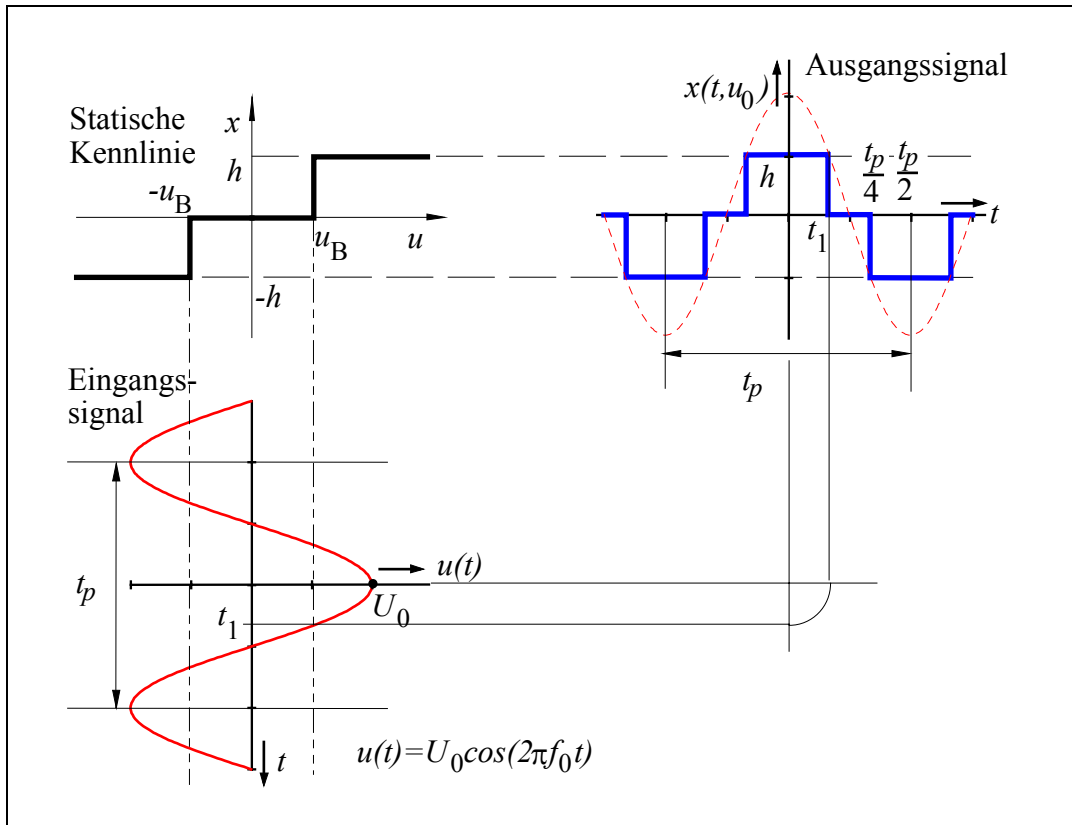
$$u(t) = U_0 \cos(2\pi f_0 t)$$

am Eingang des **frequenzunabhängigen** nichtlinearen Systems gilt dann folgende Formel zur Bestimmung des Signals am Ausgang dieses nichtlinearen Systems:

$$x(t, U_0) = \underbrace{|N(U_0)| U_0}_{x_g(t, U_0)} \cos(2\pi f_0 t + \varphi_1) + \underbrace{x_z(t, U_0)}_{\text{Verzerrungsanteil}} \quad (7)$$

Grundwelle des Ausgangssignals

2.2. Die Beschreibungsfunktion des verzögerungsfreien Dreipunktschalters



Reaktion des verzögerungsfreien Dreipunktschalters auf ein kosinusförmiges Eingangssignal

Allgemeiner Lösungsansatz: $N(U_0) = \frac{2C_1}{U_0} = \frac{2|C_1|}{U_0} e^{j\varphi_1}$

Bestimmung von C_1 :

$$C_1 = \frac{1}{t_p} \int_{-t_p/2}^{+t_p/2} x(t, U_0) e^{-j2\pi f_0 t} dt = \frac{1}{t_p} \int_{-t_p/2}^{+t_p/2} x(t, U_0) (\cos(2\pi f_0 t) - j\sin(2\pi f_0 t)) dt; \quad f_0 = \frac{1}{t_p}$$

Auch hier ist bei Wirken einer geraden Funktion $u(t) = U_0 \cos(2\pi f_0 t)$ am Systemeingang das Ausgangssignals $x(t, U_0)$ ebenfalls eine gerade Funktion, so das gilt:

$$C_1 = \frac{1}{t_p} \int_{-t_p/2}^{+t_p/2} x(t, U_0) \cos(2\pi f_0 t) dt = \frac{4}{t_p} \int_0^{+t_p/4} x(t, U_0) \cos(2\pi f_0 t) dt$$

Mit

$$x(t, U_0) = \begin{cases} h & \text{für } 0 \leq t \leq t_1 \\ 0 & \text{für } t_1 < t \leq t_p / 4 \end{cases}$$

erhält man

$$C_1 = \frac{4}{t_p} \int_0^{t_1} h \cos(2\pi f_0 t) dt = \frac{4h}{t_p} \cdot \frac{1}{2\pi f_0} \sin(2\pi f_0 t) \Big|_0^{t_1}$$

$$C_1 = \frac{2h}{\pi} \sin(2\pi f_0 t_1)$$

- • Bestimmung von t_1 :

$$U_0 \cos(2\pi f_0 t_1) = u_B \text{ bzw. } \cos(2\pi f_0 t_1) = \frac{u_B}{U_0}$$

Mit

$$\sin^2(2\pi f_0 t_1) + \cos^2(2\pi f_0 t_1) = 1 \text{ bzw. } \sin(2\pi f_0 t_1) = \sqrt{1 - \cos^2(2\pi f_0 t_1)}$$

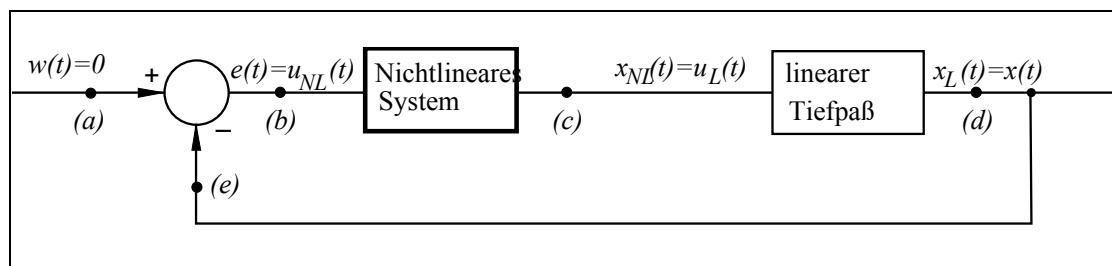
erhält man schließlich

$$C_1 = \frac{2h}{\pi} \sqrt{1 - \frac{u_B^2}{U_0^2}}$$

oder für die Beschreibungsfunktion des verzögerungsfreien Dreipunktschalters

$$N(U_0) = \frac{2C_1}{U_0} = \frac{4h}{\pi U_0} \sqrt{1 - \left(\frac{u_B}{U_0}\right)^2} t \quad (8)$$

2.3. Stabilität von Regelkreisen mit einer Nichtlinearität



Da das lineare System im Regelkreis alle Oberwellen im Signal am Ausgang des nichtlinearen Systems unterdrückt, hat man es an der Stabilitätsgrenze nur **mit einer harmonischen Schwingung am Eingang des nichtlinearen Systems** zu tun.

Daraus folgt:

- (a) Zur Beschreibung des nichtlinearen Systems kann die lineare Ersatzkenngröße "**Beschreibungsfunktion** $N(E_0)$ " verwendet werden.
- (b) Die Bedingungen für das Dauerschwingen könne, wie bei den linearen systemen, aus der Balancegleichung

$$1 + G_0(\omega) = 0$$

ermittelt werden, wobei

$$G_0(\omega) = N(E_0) \cdot G_L(\omega)$$

die Übertragungsfunktion der **offenen Schleife** ist.

Daraus ergibt sich die Balancegleichung der Schwingungsbedingungen:

$$N(E_0) = -\frac{1}{G_L(\omega)}$$

Die Lösung dieser Gleichung erhält man, indem man die Funktionen

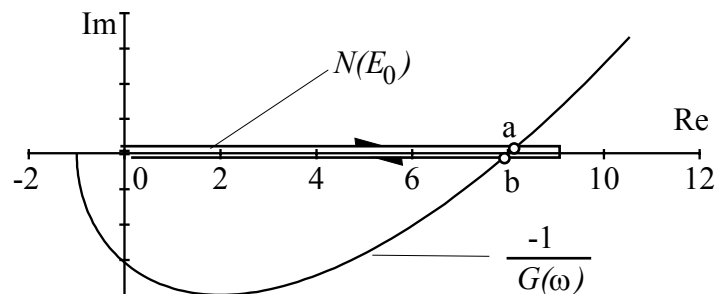
- $N(E_0)$ in Abhängigkeit von E_0

und

$$-\frac{1}{G_L(\omega)}$$

in Abhängigkeit von ω

in der komplexen Zahlenebenen (als Ortskurven) darstellt und ihren Schnittpunkt ermittelt:



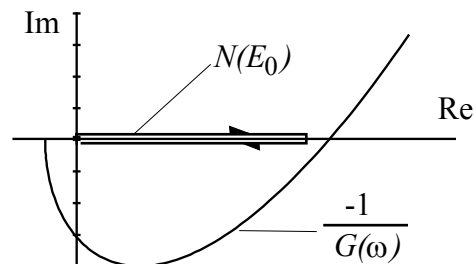
Beispiel: Stabilität eines Regelkreises mit einem Dreipunktschalter

Fall 1:

Beide Kurven schneiden sich nicht. Die Schwingungsbedingung

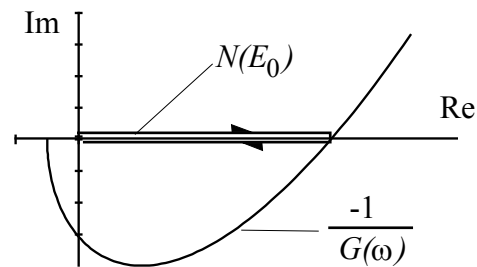
$$N(E_0) = -\frac{1}{G_L(\omega)}$$

ist nie erfüllt; das System ist stabil.



Fall 2:

Beide Kurven berühren sich.
 Bei Vergrößerung der Amplitude am Eingang des nichtlinearen Systems verkleinert sich die Beschreibungsfunktion, wodurch die Amplitude am Eingang kleiner wird.



Dadurch nähert sich die Schwingung asymptotisch wieder der Grenzschwingung. Bei einer Verkleinerung der Amplitude am Eingang des nichtlinearen Systems verkleinert sich auch die Beschreibungsfunktion (Verstärkungsfaktor für die Grundwelle), wodurch die Schwingung abklingt.

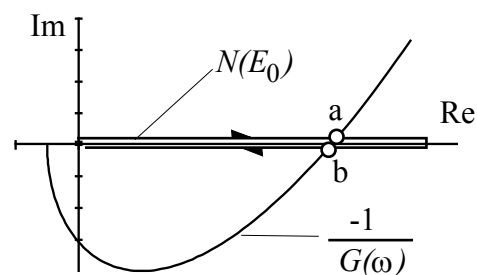
Das System ist semistabil.

Fall 3:

Beide Kurven schneiden sich.

Schnittpunkt a:

Das System schwingt mit konstanter Amplitude. Wird infolge einer Störung das Signal am Eingang des nichtlinearen



Systems größer, so wird auch $N(E_0)$ größer. Es kommt zu einem Aufschwingen; das System wird instabil.

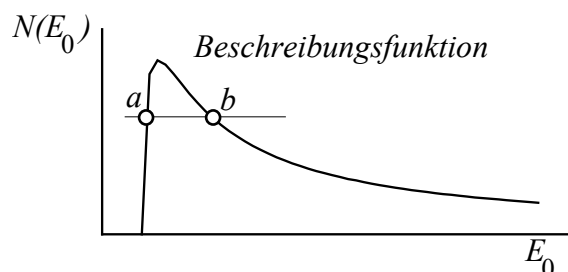
Mit größer werdender Amplitude E_0 wächst $N(E_0)$ zunächst, wird dann aber wieder kleiner. Die Schwingung nähert sich asymptotisch der durch den Schnittpunkt b gekennzeichneten Grenzschwingung.

Schnittpunkt b:

Das System schwingt jetzt mit einer größeren Amplitude. Wird E_0 zufällig kleiner (infolge einer Störung), so wird $N(E_0)$ wieder größer, wodurch auch E_0 wieder größer wird.

Folglich kommt es zu keinem Aufschwingen, sondern zu einem stabilisierenden Gegensteuern.

Das System schwingt mit einer stabilen Grenzschwingung.



3. Übungsvorbereitung:

Wiederholung der Grundlagen

Bestimmen Sie den Verlauf der Beschreibungsfunktion eines verzögerungsfreien Zweipunktschalters mit den Parametern:

| | | | |
|----------------------|-----------|---------------------------|---------------|
| unterer Arbeitspunkt | $-h = -8$ | unterer Umschaltzeitpunkt | $-d/2 = -0.5$ |
| oberer Arbeitspunkt | $+h = +8$ | oberer Umschaltzeitpunkt | $+d/2 = +0.5$ |

Untersuchen Sie die Stabilität der im Punkt 4.3. vorgegebenen Regelkreise.

4. Übungsdurchführung:

Hinweis:

Stellen Sie für alle nachfolgenden Betrachtungen folgende Simulationsparameter ein:

Simulationsdauer 30 sec **Schrittweite 0.05 sec !!!** Simulationsverfahren: **Euler**

- 4.1. Simulieren Sie mit **BORIS** einen Regelkreis mit einer Nichtlinearität nach Abb. 2.1. Verwenden Sie dabei als **nichtlineares System** eine verzögerungsfreien **Dreipunktschalter** mit den Parametern

| | | | |
|----------------------|-----------|-----------------------|---------------|
| unterer Arbeitspunkt | $-h = -2$ | unterer Umschaltpunkt | $-d/2 = -0.5$ |
| oberer Arbeitspunkt | $+h = +2$ | oberer Umschaltpunkt | $+d/2 = +0.5$ |

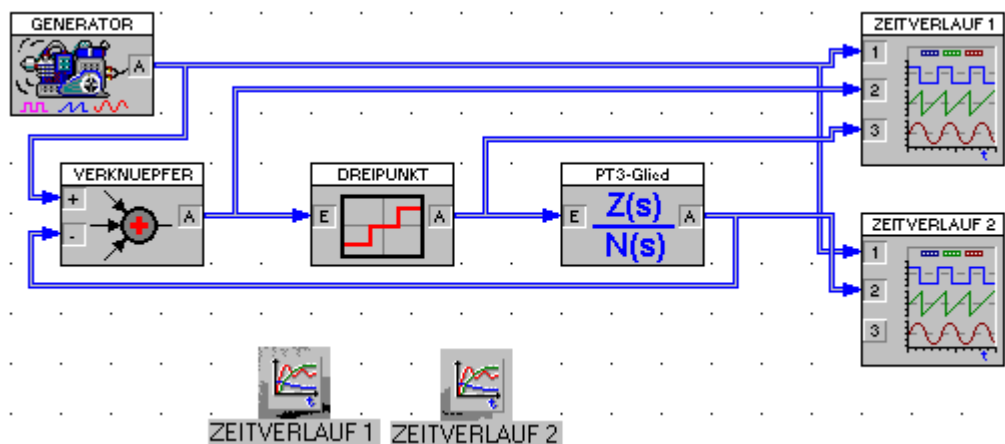
und als **lineares System** ein PT_3 -Glieder mit mit $G_L(p) = \frac{1}{(1+p)^3}$.

Am Eingang des Systems wirke eine harmonische Führungsgröße $w(t) = W_0 \sin(\omega_0 t)$ mit den Parametern

| | | | |
|-----------|-----------|---------------|----------------|
| Amplitude | $W_0 = 1$ | Kreisfrequenz | $\omega_0 = 1$ |
|-----------|-----------|---------------|----------------|

Beobachten Sie mit Hilfe der Zeitverlaufsaufnahme die Signalformen an den unterschiedlichen Punkten im Regelkreis und vergleichen Sie die Ergebnisse mit den theoretischen Ausführungen in Abschn. 2.1., speziell mit Abb. 2.1.

Schaltungsanordnung:



- 4.2. Messen Sie im offenen Regelkreis mit einem Dreipunktschalter mit den Parametern

| | | | |
|----------------------|-----------|-----------------------|---------------|
| unterer Arbeitspunkt | $-h = -8$ | unterer Umschaltpunkt | $-d/2 = -0.5$ |
| oberer Arbeitspunkt | $+h = +8$ | oberer Umschaltpunkt | $+d/2 = +0.5$ |

(vgl. Übungsvorbereitung)

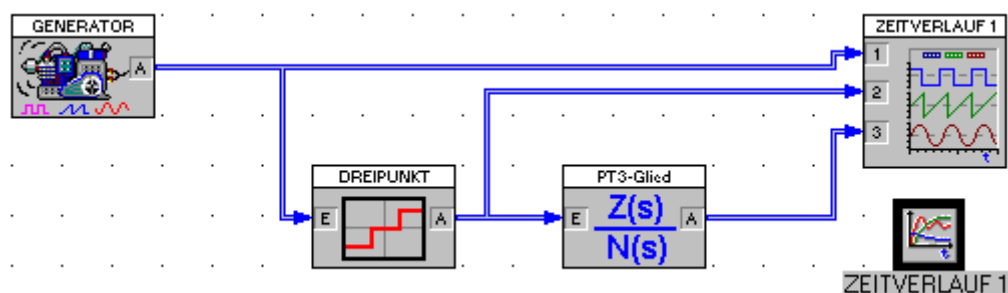
und einem PT_3 -Glieder mit $G_L(p) = \frac{1}{(1+p)^3}$ **punktweise** die Werte der Beschreibungsfunktion des Dreipunktschalters. Verwenden Sie dabei als Meßsignal eine harmonische Schwingung $e(t) = E_0 \sin(\omega_0 t)$ mit einer Kreisfrequenz $\omega_0 = 1$ und folgenden Amplituden

| Meßpunkt | Amplitude E_0 | Beschreibungsfunktion $N(E_0)$ |
|----------|-----------------|--------------------------------|
| 1 | 0.5 | |
| 2 | 0.75 | |
| 3 | 1.0 | |
| 4 | 1.25 | |
| 5 | 1.5 | |
| 6 | 1.75 | |
| 7 | 2.0 | |

Ermitteln Sie die Werte der Beschreibungsfunktion des Dreipunktschalters durch Vergleich der Amplituden des Meßsignals mit den Amplituden des Signals am Ausgang des PT_3 -Glieds.

Vernachlässigen Sie dabei die durch das PT_3 -Glieder verursachte Phasenverschiebung und beachten Sie, daß das PT_3 -Glieder die Grundwelle im Signal am Ausgang des Dreipunktschalters bei $\omega_0 = 1$ um -9 dB ($-9 \text{ dB} \hat{=} |G(\omega_0)| = 0.355$) dämpft !

Schaltungsanordnung:



- 4.3. Untersuchen Sie die Stabilität des Regelkreises mit einem Dreipunktschalter und dem PT_3 -Glieder mit $G_L(p) = \frac{1}{(1+p)^3}$.

Benutzen Sie dabei als **Störgröße** einen auf die Führungsgröße $w(t) \equiv 0$ bei $t = 2$ (Verzugszeit $TD = 2$) **kurzzeitig einwirkenden Einzelimpuls** der Amplitude $U_0 = 0.51$ und der Pulsweite $TW = 1$ (Periodendauer $TP > 100$).

Untersuchen Sie die Stabilität des Regelkreises für folgende Parameter des Dreipunktschalters:

Fall 1:

| | | | |
|----------------------|-----------|---------------------------|---------------|
| unterer Arbeitspunkt | $-h = -4$ | unterer Umschaltzeitpunkt | $-d/2 = -0.5$ |
| oberer Arbeitspunkt | $+h = +4$ | oberer Umschaltzeitpunkt | $+d/2 = +0.5$ |

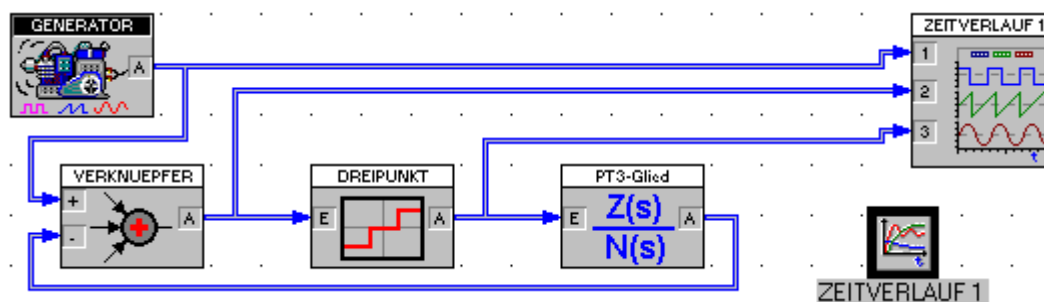
Fall 2:

| | | | |
|----------------------|--------------|---------------------------|---------------|
| unterer Arbeitspunkt | $-h = -6.28$ | unterer Umschaltzeitpunkt | $-d/2 = -0.5$ |
| oberer Arbeitspunkt | $+h = +6.28$ | oberer Umschaltzeitpunkt | $+d/2 = +0.5$ |

Fall 3:

| | | | |
|----------------------|-----------|---------------------------|---------------|
| unterer Arbeitspunkt | $-h = -8$ | unterer Umschaltzeitpunkt | $-d/2 = -0.5$ |
| oberer Arbeitspunkt | $+h = +8$ | oberer Umschaltzeitpunkt | $+d/2 = +0.5$ |

Schaltungsanordnung:



5. Übungsauswertung:

Diskutieren Sie die Ergebnisse.